ミッタク・レフラーの論法

平成 30 年 8 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

有理型函数に対するミッタク・レフラーの定理やベールの範疇定理に於ける稠密性の議論を、完備距離空間の射影列の逆極限または射影極限と称する極限に於けるミッタク・レクラーの論法に依って一般的に論じよう。第 2 節・第 4 節では主に [3] に従って述べる。第 3 節では [4] に従って述べ、第 5 節では [1] に従って述べる。

1. 稠密性

位相空間 X の部分集合 D は $\overline{D} = X$ なる時 X で**稠密** (dense) であると謂う。

命題 1　位相空間 X の部分集合 D に対し次は同値である:

(1) D は X で稠密である。

(2) X の空でない任意の開集合 U に対し $U \cap D \neq \emptyset$

(3) X の任意の開集合 U に対し $\overline{U \cap D} = \overline{U}$

（証明）(1) $\Rightarrow$ (2) : 対偶を示す。U を空でない開集合で $U \cap D = \emptyset$ なるものとする。この時 $D \subset X \setminus U$ 且つ $X \setminus U$ は閉集合故 $\overline{D} \subset \overline{X \setminus U} = X \setminus U$ となる。$U \neq \emptyset$ より $\overline{D} \subsetneqq X$ が従う。
(2) $\Rightarrow$ (3) : $U = \emptyset$ なら (3) は成立するので $U \neq \emptyset$ とする。$U \cap D \subset U$ より $\overline{U \cap D} \subset \overline{U}$ が従うので $\overline{U} \subset \overline{U \cap D}$ を示せば良い。任意に $x \in \overline{U}$ を取る。$x \in V$ なる任意の開集合 V に対し $U \cap V \neq \emptyset$ であるから $U \cap V$ は空でない開集合である。(2) より $V \cap (U \cap D) = (U \cap V) \cap D \neq \emptyset$ が従う。これは $x \in \overline{U \cap D}$ を意味する。
(3) $\Rightarrow$ (1) : (3) に於いて $U = X$ と取ると $\overline{X \cap D} = \overline{X}$ を得る。ここに $\overline{X \cap D} = \overline{D}$ 且つ $\overline{X} = X$ 故 $\overline{D} = X$ が従う。

命題 2　距離空間 (X, d) の部分集合 D に対し次は同値である:

(1) D は X で稠密である。

(2) $\displaystyle\sup_{x \in X} d(x, D) = 0$　　ここに $d(x, D) := \displaystyle\inf_{y \in D} d(x, y)$ は x と D との距離である。

（証明）(1) $\Rightarrow$ (2)：$x \in X$ を一つ取り $\varepsilon > 0$ を任意に与える。仮定 (1) に依り $y \in D$ が存在し $d(x, y) < \varepsilon$ となる。これより $d(x, D) < \varepsilon$ が従い ε は任意故 (2) が従う。
(2) $\Rightarrow$ (1)：$x \in X$ を一つ取る。$d(x, D) = 0$ より D の列 $(y_n) \subset D$ が存在し $d(x, y_n) < 1/n$ となる。これより $\bar{D} = X$ が従う。

命題３　位相空間 X から位相空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ の像は稠密であるとする。このとき X の任意の稠密集合 D の f に依る像 $f(D)$ は Y で稠密である。

（証明）Y の空でない開集合を V とする。$f(X)$ は Y で稠密故 $W := V \cap f(X) \neq \emptyset$ となる。さて $f^{-1}(W) = f^{-1}(V)$ 故 $f^{-1}(W)$ は X の空でない開集合である。D は稠密故 $f^{-1}(W) \cap D \neq \emptyset$ となる。従って $x \in D$ が存在し $f(x) \in W$ となる。この時 $f(x) \in V \cap f(D)$ となり $V \cap f(D) \neq \emptyset$ が従う。これは Y に於ける $f(D)$ の稠密性に外ならない。

2. 完備距離空間の射影列に対するミッタク・レフラーの論法

$(X_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を空でない集合 X_n の列とし $n > m$ なる任意の組 $(n, m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し写像 $\iota_m^n : X_n \to X_m$ が定義され次の**両立条件** (compatibility condition)

$$n > m > l \quad \text{に対し} \quad \iota_l^m \circ \iota_m^n = \iota_l^m$$

を満たす時 $((X_n), (\iota_m^n))$ を**射影系** (projective system) と謂う。射影系の**射影極限** (projective limit) 若しくは**逆極限** (inverse limit) とは直積集合 $X = \prod_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} X_n$ の部分集合

$$\varprojlim((X_n), (\iota_m^n)) := \{u \in X; \text{任意の } n > m \text{ に対し } (\iota_m^n \circ p_n)(u) = p_m(u)\}$$

であると定義する。ここに $p_m : X \longrightarrow X_m$ は第 m 成分への射影である。以下簡単の為 $((X_n), (\iota_m^n))$ の射影極限を $\varprojlim X_n$ と表す。

定理１ [3]. 完備距離空間 (X_n, d_n) から成る射影系 $((X_n), (\iota_m^n))$ に対し X_n の空でない部分集合 D_n から成る列 $(D_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 及び $(\iota_{n-1}^n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ は次の条件 (i) (ii) を満たしているものとする:

(i) 任意の $n \geq 1$ 及び任意の $x, y \in D_n$ に対し

$$d_{n-1}\left(\iota_{n-1}^n(x), \iota_{n-1}^n(y)\right) \leq d_n(x, y)$$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in D_{n-1}} d_{n-1}\left(x, \iota_{n-1}^n(D_n)\right) < \infty,$

$$\text{ここに} \quad d_{n-1}\left(x, \iota_{n-1}^n(D_n)\right) = \inf_{y \in D_n} d_{n-1}\left(x, \iota_{n-1}^n(y)\right)$$

このとき $\varprojlim X_n \neq \emptyset$ であり任意の $m \geq 1$ に対し

$$\sup_{x \in D_{m-1}} d_{m-1}\left(x, \bigcap_{n=m}^{\infty} \iota_{m-1}^{n}(D_n)\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \sup_{x \in D_{n-1}} d_{n-1}\left(x, \iota_{n-1}^{n}(D_n)\right)$$

（証明）$\lambda_n := \sup_{x \in D_{n-1}} d_{n-1}\left(x, \iota_{n-1}^{n}(D_n)\right)$ と置く。$x_0 \in D_0$ を取り $\varepsilon > 0$ を与える。この時 $y_1 \in D_1$ が存在し

$$d_0\left(x_0,\ \iota_0^1(y_1)\right) < \lambda_0 + \varepsilon$$

を満たす。この $y_1 \in D_1$ に対し $y_z \in D_2$ が存在し

$$d_1\left(y_1,\ \iota_1^2(y_2)\right) < \lambda_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす。以下同様に任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $y_n \in D_n$ なる点列 $(y_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ が存在し

$$d_{n-1}\left(y_{n-1},\ \iota_{n-1}^{n}(y_n)\right) < \lambda_{n-1} + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たす。そこで $j \geq 0$ 及び $n > j$ に対し $x_j^n := \iota_j^n(y_n) \in X_j$ と置くと (i) より

$$\begin{aligned}
&d_j(x_j^{n-1}, x_j^n) \\
&= d_j\left(\iota_j^{j+1}\left(\iota_{j+1}^{n-1}(y_{n-1})\right),\ \iota_j^{j+1}\left(\iota_{j+1}^{n}(y_n)\right)\right) \\
&\leq d_{j+1}\left(\iota_{j+1}^{n-1}(y_{n-1}),\ \iota_{j+1}^{n}(y_n)\right) \\
\cdots &\leq d_{n-1}\left(y_{n-1},\ \iota_{n-1}^{n}(y_n)\right) < \lambda_{n-1} + \frac{\varepsilon}{2^n},
\end{aligned}$$

$m > n > j$ に対し

$$\begin{aligned}
&d_j(x_j^n, x_j^m) \\
\leq &\sum_{k=n+1}^{m} d_j(x_j^{k-1},\ x_j^k) \\
\leq &\sum_{k=n+1}^{m}\left(\lambda_{k-1} + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_{k-1} + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

となるから点列 $(x_j^n; n \geq j+1)$ は X_j に於けるコーシー列となる。完備性により $x_j \in X_j$ が存在し

$$d_j(x_j^n, x_j) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たす。この時 $x_j^n = \iota_j^n(y_n) = \iota_j^{j+1} \circ \iota_{j+1}^n(y_n) = \iota_j^{j+1}(x_{j+1}^n)$ 故

$$\begin{aligned}
d_j(\iota_j^{j+1}(x_{j+1}), x_j) &\leq d_j(\iota_j^{j+1}(x_{j+1}), x_j^n) + d_j(x_j^n, x_j) \\
&\leq d_{j+1}(x_{j+1}, x_{j+1}^n) + d_j(x_j^n, x_j) \\
&\to 0\ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となり等式 $\iota_j^{j+1}(x_{j+1}) = x_j$ が任意の $j \geq 0$ に対し成立する。従って $x = (x_j; j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は $\varprojlim X_n$ の元となる。

さて $m \geq 1$ として $x \in D_{m-1}$ を任意に取る。この時、任意の $\varepsilon > 0$ 及び任意の $n \geq m$ に対し $y_n \in D_n$ なる点列 $(y_n; n \geq m)$ が存在し

$$
\begin{aligned}
&d_{m-1}(x, \iota_{m-1}^m(y_m)) < \lambda_{m-1} + \frac{\varepsilon}{2^m}, \\
&d_{n-1}(y_{n-1}, \iota_{n-1}^n(y_n)) < \lambda_{n-1} + \frac{\varepsilon}{2^n}
\end{aligned}
$$

を満たす。従って

$$
\begin{aligned}
&d_{m-1}\left(x, \bigcap_{n=m}^{\infty} \iota_{m-1}^n(D_n)\right) \\
&= d_{m-1}\left(x, \bigcap_{n=m}^{\infty} \iota_{m-1}^m \circ \cdots \circ \iota_{n-1}^n(D_n)\right) \\
&\leq d_{m-1}\left(x, \iota_{m-1}^m(D_m)\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} d_{m-1}\left(\iota_{m-1}^m \circ \cdots \circ \iota_{n-2}^{n-1}(D_{n-1}), \iota_m^{m+1} \circ \cdots \circ \iota_{n-1}^n(D_n)\right) \\
&\leq d_{m-1}\left(x, \iota_{m-1}^m(D_m)\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} d_n\left(D_{n-1}, \iota_{n-1}^n(D_n)\right) \\
&\leq d_{m-1}\left(x, \iota_{m-1}^m(y_m)\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} d_{n-1}\left(y_n, \iota_{n-1}^n(y_n)\right) \\
&\leq \sum_{n=m-1}^{\infty}\left(\lambda_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_{n-1} + \frac{\varepsilon}{2^{m-1}}
\end{aligned}
$$

となり $\varepsilon > 0$ は任意故

$$
d_{m-1}\left(x, \bigcap_{n=m}^{\infty} \iota_{m-1}^n(D_n)\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_{n-1}
$$

が従う。

系 1　完備距離空間 (X_n, d_n) から成る射影系 $((X_n), (\iota_m^n))$ に対し X_n の稠密な開集合 D_n から成る列 $(D_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 及び $(\iota_{n-1}^n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ は次の条件 (i)(ii)$'$ を満たしているものとする:

(i) 任意の $n \geq 1$ 及び任意の $x, y \in D_n$ に対し

$$
d_{n-1}\left(\iota_{n-1}^n(x), \iota_{n-1}^n(y)\right) \leq d_n(x, y)
$$

(ii)$'$ 任意の $n \geq 1$ に対し $\iota_{n-1}^n(D_n)$ は X_{n-1} で稠密である。

このとき $\varprojlim X_n \neq \emptyset$ であり任意の $m \geq 1$ に対し $\bigcap_{n=m}^{\infty} \iota_{m-1}^n(D_n)$ は特に $p_{m-1}(\varprojlim X_n)$ は X_{m-1} で稠密である。更に $D_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \iota_0^n(D_n)$ は X_0 で稠密である。

（証明）(ii)$'$ より任意の $n\geq 1$ に対し $\sup_{x\in D_{n-1}} d_{n-1}(x,\iota_{n-1}^n(D_n))=0$ となるから定理 1 より $\varprojlim X_n\neq\emptyset$ であり任意の $m\geq 1$ に対し

$$\sup_{x\in D_{m-1}} d_{m-1}\left(x,\bigcap_{n=m-1}^{\infty}\iota_{n-1}^n(D_n)\right)=0$$

即ち $\bigcap_{n=m}^{\infty}\iota_{m-1}^n(D_n)$ は X_{m-1} で稠密である。特に

$$\begin{aligned}
p_{m-1}(\varprojlim X_n)&=\{u_{m-1}\in X_{m-1};u\in\varprojlim X_n\text{が存在し }u=(u_n;n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})\}\\
&\supset\{u_{m-1}\in X_{m-1};\text{任意の }n\geq m\text{ に対し }u_n\in D_n\text{が存在し }u_{m-1}=\iota_{m-1}^n(u_n)\}\\
&=\bigcap_{n=m}^{\infty}\iota_{m-1}^n(D_n)
\end{aligned}$$

より $p_{m-1}(\varprojlim X_n)$ も稠密である。

以上より $E_0:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\iota_0^n(D_n)$ は X_0 で稠密である。従って X_0 の空でない任意の開集合 U に対し $U\cap E_0\neq\emptyset$ となる。このとき $U\cap D_0$ も空でない X_0 の開集合であるから $U\cap D_0\cap E_0\neq\emptyset$ となる。これは $D_0\cap E_0$ が稠密である事を意味する。

系 2　完備距離空間 (X_n,d_n) の列 $(X_n;n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ と連続写像 $\iota_n:X_n\to X_{n-1}$ の列 $(\iota_n;n\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$ と X_n の稠密な開集合の列 $(D_n;n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ は系 1 の条件 (ii)$'$ を満たすものとする。このとき $n>m$ なる任意の n,m に対し $\iota_m^n:=\iota_{m+1}\circ\cdots\circ\iota_n:X_n\to X_m$ と置けば $((X_n),(\iota_m^n))$ は射影系を成し $\varprojlim X_n\neq\emptyset$ となる。また任意の $m\geq 1$ に対し $\bigcap_{n=m}^{\infty}\iota_{m-1}^n(D_n)$ 特に $p_{m-1}(\varprojlim X_n)$ は X_{m-1} で稠密である。更に $D_0\cap\bigcap_{n=m}^{\infty}\iota_0^n(D_n)$ は X_0 で稠密である。

（証明）X_n に距離 δ_n を $\delta_0=d_0$,

$$\delta_n(x,y):=\max\left(d_n(x,y),\ \max_{0\leq j\leq n-1}d_j\left(\iota_{j+1}^n(x),\iota_{j+1}^n(y)\right)\right),n\geq 1$$

で定義する。このとき $d_n(x,y)\leq\delta_n(x,y)$ である。任意の一点 x_0 及び任意の $\varepsilon>0$ に対し $\iota_{j+1}^n:X_n\to X_j$ は連続であるから $\delta>0$ が存在し $d_n(x_0,y)<\delta$ なる任意の $y\in X_n$ に対し

$$\max_{0\leq j\leq n-1}d_j\left(\iota_{j+1}^n(x_0),\iota_{j+1}^n(y)\right)<\varepsilon$$

が従う。故に

$$\tilde{B_n}(x_0;\eta):=\{y\in X_n;\delta_n(x_0,y)<\eta\}$$

とすると

$$\tilde{B_n}(x_0;\varepsilon\wedge\delta)\subset B_n(x_0;\varepsilon)\subset\tilde{B_n}(x_0;\varepsilon)$$

が従う。これは δ_n と d_n が同値な基本近傍系を導く事を意味する。
特に (X_n, δ_n) は完備距離空間であり D_n は X_n の稠密な開集合となる。また $x, y \in X_n$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\delta_{n-1}(\iota_n(x), \iota_n(y)) \\
&= \max\left(d_{n-1}\left(\iota_n(x), \iota_n(y)\right), \max_{0\le j\le n-2} d_j\left(\iota_{j+1}^{n-1}\circ\iota_n(x), \iota_{j+1}^{n-1}\circ\iota_n(y)\right)\right) \\
&= \max_{1\le j\le n-1} d_j(\iota_{j+1}^n(x), \iota_{j+1}^n(y)) \\
&\le \max\left(d_n(x,y), \max_{0\le j\le n-1} d_j\left(\iota_{j+1}^n(x), \iota_{j+1}^n(y)\right)\right) \\
&= \delta_n(x,y)
\end{aligned}
$$

が従うので $((X_n, \delta_n), (\iota_m^n))$ と (D_n) は系 1 の条件を全て満たしている事になる。故に系 1 と同じ結論が従う。

系３（ブルバキに依るミッタク・レフラーの定理 [2]）　完備距離空間 (X_n, d_n) から成る射影系 $((X_n, d_n), (\iota_m^n))$ の全ての写像 $\iota_m^n : X_n \to X_m$ は連続で稠密な像を持つとする。このとき $\varprojlim X_n \neq \emptyset$ であり任意の $m \ge 1$ に対し $\displaystyle\bigcap_{n=m}^{\infty} \iota_{m-1}^n(X_n) = p_{m-1}(\varprojlim X_n)$ は X_{m-1} で稠密である。

（証明）系 2 に於いて $D_n = X_n$ とすれば良い。

３．ベールの範疇定理への応用

ベールの範疇定理を完備距離空間の射影列に対するミッタク・レフラーの論法で捉えよう。

定理２　完備距離空間 (X, d) に於ける連続写像 $T_n : X \to X, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ は全て稠密な像を持つとする。このとき $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} T_1 \circ \cdots \circ T_n(X)$ は X で稠密である。

（証明）系 3 に於いて $X_n = X,\ \iota_{n-1}^n = T_n$ とすれば良い。

定理３　完備距離空間 (X, d) に於ける連続写像 $T : X \to X$ は稠密な像を持つとし $(D_n; n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ を X の稠密な開集合の列とする。このとき $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(D_n)$ は X で稠密である。

（証明）系 2 に於いて $X_n = X,\ \iota_{n-1}^n = T$ とすれば良い。

系（ベールの範疇定理）　(X, d) を完備距離空間とし $(D_n; n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ を X の稠密な開集合の列とする。このとき $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$ は X で稠密である。

（証明）定理 3 に於いて T を恒等写像とすれば良い。

４．全平面に於けるミッタク・レフラーの定理への応用

[3] に従って、全平面に於けるミッタク・レフラーの定理を完備距離空間の射影列に対するミッタク・レフラーの論法で捉えよう。

定理４　$(a_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \subset \mathbb{C}$ を $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ なる列とし $(P_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ を a_n に極を持つ有理函数の列とする。このとき各 a_n に於ける主要部を P_n とする $\mathbb{C}$ 上の有理型函数が存在する。

（証明）各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し B_n 及び X_n を $B_n := B(0; n) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < n\}$ 及び

$$X_n := \{f \in \mathscr{M}(B_n);\ f - \sum_{m \in I(n)} P_m \in \mathscr{O}(B_n)\}$$

と定義する。ここに $\mathscr{M}(B_n)$ 及び $\mathscr{O}(B_n)$ は夫々 B_n 上の有理型函数及び正則函数の全体で

$$I(n) := \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}; a_m \in B_n\}$$

とする。また $f - \sum_{m \in I(n)} P_m \in \mathscr{O}(B_n)$ とは $B_n \setminus \{a_m \in \mathbb{C};\ m \in I(n)\}$ 上の有理型函数 $f - \sum_{m \in I(n)} P_m$ が B_n 上に正則拡張を持つ事であるとする。B_n は $K_j^n := \overline{B(0; n - 1/j)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq n - 1/j\}$ に依って $B_n = \bigcup_{j \geq 1} K_j^n$ と表され $\mathscr{O}(B_n)$ は

$$\delta_n(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - g; L^\infty(K_j^n)\|}{1 + \|f - g; L^\infty(K_j^n)\|}$$

で定まる距離 δ_n で完備となる。X_n は

$$d_n(f, g) = \delta_n\left(f - \sum_{m \in I(n)} P_m,\ g - \sum_{m \in I(n)} P_m\right)$$

で定まる距離 d_n で完備となる。$f \in X_n$ に対し $\iota_n(f) = f|B_{n-1}$ とする事で写像 $\iota_n : X_n \to X_{n-1}$ が定まり

$$\begin{aligned}
&d_{n-1}(\iota_n(f), \iota_n(g)) \\
&= \delta_{n-1}\left(\iota_n(f) - \sum_{m \in I(n)} P_m,\ \iota_n(g) - \sum_{m \in I(n)} P_m\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|\iota_n(f - g);\ L^\infty(K_j^n)\|}{1 + \|\iota_n(f - g);\ L^\infty(K_j^n)\|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - g;\ L^\infty(K_j^n)\|}{1 + \|f - g;\ L^\infty(K_j^n)\|} = d_n(f, g)
\end{aligned}$$

が任意の $f,g\in X_n$ に就いて成立つ。故に $\iota_n:X_n\to X_{n-1}$ は連続となる。次に $\iota_n(X_n)$ は X_{n-1} に於いて稠密である事を示そう。$f\in X_{n-1}$ を任意に与えると $f-\displaystyle\sum_{m\in I(n)}P_m\in\mathscr{O}(B_{n-1})$ である。任意の $m\in I(n)\setminus I(n-1)$ に対し $a_m\notin B_{n-1}$ である為 $P_m\in\mathscr{O}(B_{n-1})$ となる。従って $f-\displaystyle\sum_{m\in I(n)}P_m\in\mathscr{O}(B_{n-1})$ となる。$f-\displaystyle\sum_{m\in I(n)}P_m$ は B_{n-1} の任意のコンパクト集合上一様収束する冪級数展開を持つので、その第 k 部分和である多項式を g_k とすると $(g_k)\subset\mathscr{O}(B_n)$ であり $d_{n-1}(f-\displaystyle\sum_{m\in I(n)}P_m,\ g_k)\to 0(k\to\infty)$ を満たす。この時 $g_k+\displaystyle\sum_{m\in I(n)}P_m\in X_n$ であり

$$d_{n-1}\left(f,\ \iota_n(g_k+\sum_{m\in I(n)}P_m)\right)=d_{n-1}\left(f-\sum_{m\in I(n)}P_m,\ g_k\right)\to 0$$

となるので $\iota_n(X_n)$ の X_{n-1} に於ける稠密性が従う。故にブルバキに依るミッタク・レフラーの定理より $\varprojlim X_n\neq\emptyset$ となる。これは定理の条件を満たす有理型函数の存在を意味する。

5．C_0-半群の無限積への応用

X をバナハ空間とし各 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し C_0-半群 $(U_n(t);\ t\geq 0)$ が与えられており、それらは次の意味で可換であるとする:

$$\text{任意の } m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ 及び任意の } t,s\geq 0 \text{ に対し } U_m(t)U_n(s)=U_n(S)U_m(t)$$

C_0-半群 $(U_n(t);\ t\geq 0)$ の生成作用素を A_n とする:

$$\begin{cases} D(A_n):=\{u\in X;\ X \text{ に於いて極限 } \displaystyle\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}(U_n(h)-I)u \text{ が存在する }\} \\ \\ A_nu=\displaystyle\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}(U_n(h)-I)u,\ u\in D(A_n) \end{cases}$$

次の命題は C_0-半群 $(U_n(t);\ t\geq 0)$ の無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}U_n(t)$ の理論の基礎を成す [1]。

命題４　$D:=\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}D(A_n)$ は X の稠密部分空間である。

（証明）$X_0:=X,\ X_n:=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}D(A_k)$ と置き X_n にノルム $\|\cdot\|_n$ を

$$\|u\|_n:=\|u\|+\sum_{k=1}^{n}\|A_ku\|,\ u\in X_n$$

に拠り定義する。$A_1,\cdots,A_n$ は閉作用素であるから $(X_n,\|\cdot\|_n)$ は完備となる。また各 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $X_n\subset X_{n-1}$ であり任意の $u\in X_n$ に対し

$$\|u\|_{n-1}\leq\|u\|_n$$

が成立つので埋め込み作用素 $\iota_n : X_n \to X_{n-1}$ は有界である。$(U_n(t); t \geq 0)$ は C_0-半群であるから $M_n \geq 1$ 及び $\omega_n \in \mathbb{R}$ が存在し任意の $u \in X$ に対し

$$\sup_{t\geq 0} e^{-t\omega_n}\|U_n(t)u\| \leq M_n\|u\|$$

が成立ち、$\lambda > \omega_n$ なる任意の $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し、稠密に定義された閉作用素 $\lambda I - A_n$ は有界な逆 $(\lambda I - A_n)^{-1} \in B(X)$ を持つ。

さて $u \in X_{n-1}$ を任意に取る。この時 $1 \leq k \leq n$ なる任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 及び $\lambda > \omega_+(n) := \max_{1\leq k\leq n}(\omega_k \vee 0)$ なる任意の $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し $(\lambda I - A_n)^{-1}u \in D(A_k)$ が成立つ事を示そう。$1 \leq k \leq n-1$ の場合を考えれば充分である。任意の $h \in (0, 1]$ に対し成立つ等式

$$h^{-1}(U_k(h) - I)u = \int_0^1 U_k(\theta h)A_k u d\theta$$

を評価し

$$\begin{aligned}\|h^{-1}(U_k(h) - I)u\| &\leq \int_0^1 M_k e^{\theta h\omega_k}\|A_k u\|d\theta \\ &\leq M_k e^{\omega_+(n)}\|A_k u\|\end{aligned}$$

及び

$$\|e^{-\lambda t}U_n(t)[h^{-1}(U_k(h) - I)u]\| \leq e^{-(\lambda-\omega_+(n))t}M_n M_k e^{\omega_+(n)}\|A_k u\|$$

を得るので C_0-半群の可換性及びルベーグの優収束定理より

$$\begin{aligned}&h^{-1}(U_k(h) - I)(\lambda I - A_n)^{-1}u \\ &= h^{-1}(U_k(h) - I)\int_0^\infty e^{-\lambda t}U_n(t)u dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}U_n(t)[h^{-1}(U_k(h) - I)u]dt \\ &\to \int_0^\infty e^{-\lambda t}U_n(t)A_k u dt = (\lambda I - A_n)^{-1}A_k u \quad (h \downarrow 0)\end{aligned}$$

が従う。これは

$$\begin{cases} (\lambda I - A_n)^{-1}u \in D(A_k) \\ \\ A_k(\lambda I - A_n)^{-1}u = (\lambda I - A_n)^{-1}A_k u, \ 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

を意味する。これより $(\lambda I - A_n)^{-1}u \in X_n$ 及び

$$\begin{aligned}&\|(\lambda I - A_n)^{-1}u - u\|_{n-1} \\ &= \|(\lambda I - A_n)^{-1}u - u\| + \sum_{k=1}^{n-1}\|A_k\lambda(\lambda I - A_n)^{-1}u - A_k u\| \\ &= \|(\lambda I - A_n)^{-1}u - u\| + \sum_{k=1}^{n-1}\|\lambda(\lambda I - A_n)^{-1}A_k u - A_k u\| \\ &\to 0 \quad (\lambda \to \infty)\end{aligned}$$

が従う。即ち $\iota_n(X_n)$ は X_{n-1} で稠密である。従って系 2 より D は X で稠密である。

参考文献

[1] W. Arendt, A. Driouich, and O. El-Mennaoui, On the infinite product of C_0-semigroups, J. Funct. Anal., **160** (1998), 524 - 542.

[2] N. Bourbaki, "Topologie Générale, " Chapitre II, Structures uniformes, Hermann, Paris 1960.

[3] J. Esterle, Mittag-Leffler methods in the theory of Banach algebras and a new approach to Michael's problem, Contemporary Math., **32** (1984), 107 - 129.

[4] C. Lennard, A generalization of Baire's category theorem, J. Math. Anal. Appl., **168** (1992), 367 - 371.